

DOI: 10.16285/j.rsm.2020.1476

# 考虑不排水抗剪强度空间变异性的黏土边坡系统失效概率分析

刘 辉, 郑俊杰, 章荣军

(华中科技大学 岩土与地下工程研究所, 湖北 武汉 430074)

**摘 要:** 针对黏土边坡, 提出了考虑不排水抗剪强度空间变异性的边坡系统失效概率计算方法。首先, 引入不排水抗剪强度随机场在滑动面上局部平均后的等效参数, 通过计算等效参数的统计特性和等效参数之间的相关系数得到对应滑动面的可靠度指标和不同滑动面失效模式之间的相关系数。其次, 综合考虑代表性滑动面的可靠度指标和相关系数, 通过逐步搜索代表性滑动面来构建代理系统, 利用代理系统的失效概率逼近边坡系统的失效概率。最后, 以 3 个边坡系统可靠度问题为例验证了方法的有效性。结果表明: 不排水抗剪强度随机场沿滑动面局部平均后的等效参数能够描述相应滑动面土体参数的不确定性, 该方法能够较好地逼近边坡的系统失效概率。随着随机场的空间相关性增强, 不同失效模式之间的相关系数增加, 在达到相同的收敛条件时, 代理模型所需的代表性滑动面个数减少。

**关 键 词:** 边坡稳定; 系统失效概率; 空间变异性; 相关失效模式; 等效参数

中图分类号: TU442

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2021) 06-1529-11

## System failure probability analysis of cohesive slope considering the spatial variability of undrained shear strength

LIU Hui, ZHENG Jun-jie, ZHANG Rong-jun

(Institute of Geotechnical and Underground Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China)

**Abstract:** A system failure probability analysis method of cohesive slope considering the spatial variability of undrained shear strength is proposed. In this method, the local averaging parameter of the random field of undrained shear strength on slip surface is introduced as an equivalent parameter. The statistical characters of the equivalent parameter and the correlation coefficient between different equivalent parameters are formulated. Then, the reliability index of a single failure mode and the correlation coefficient between different failure modes are calculated based on the equivalent parameters. By considering both the reliability index and correlation coefficient between different failure modes, the representative slip surfaces are searched step by step, and the system failure probability is assessed using those representative slip surfaces. Finally, to verify this method, three slopes are analyzed as examples. The results show that the equivalent parameter obtained by local averaging along the circular slip surface is feasible to describe the spatial variability of the undrained shear strength, and the proposed method can assess the system failure probability of cohesive slope with small error. Meanwhile, the correlation coefficient between failure modes increases with the spatial correlation of the random field, thus the number of representative slip surfaces required to achieve convergence will reduce.

**Keywords:** slope stability; system failure probability; spatial variability; correlative failure mode; equivalent parameter

## 1 引 言

考虑土体参数空间变异性的边坡系统可靠度分析是近年来边坡工程中的研究热点。土体参数的

空间变异性给边坡的失效模式和稳定系数带来了一定的不确定性, 单一失效模式和确定性安全系数无法描述这一不确定性, 需要用可靠度方法计算边坡的失效概率。在边坡可靠度分析中, 潜在滑动面有

收稿日期: 2020-09-30

修回日期: 2021-03-04

基金项目: 国家重点研发计划 (No.2016YFC0800200); 国家自然科学基金 (No.52078236)。

This work was supported by the National Key R&D Program of China(2016YFC0800200) and the National Natural Science Foundation of China(52078236).

第一作者简介: 刘辉, 男, 1993 年生, 博士研究生, 主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail: ce\_liuhui@163.com

通讯作者: 郑俊杰, 男, 1967 年生, 博士, 教授, 主要从事软土地基处理、软土地下工程方面的研究与咨询工作。E-mail: zhengjj@hust.edu.cn

无数个, 任意一个潜在滑动面发生破坏都能导致边坡系统失效。边坡系统可以看成是一个由无数潜在滑动面 (即失效模式) 串联而成的系统<sup>[1-2]</sup>。

在边坡系统可靠度分析中, 临界失效滑动面的确定是一个难点问题, 特别是在考虑土体参数的空间变异性时。目前主要有两种方法来处理临界失效滑动面。第 1 种方法每次都搜索最危险滑动面, 保证边坡总是沿着最小安全系数所对应的滑动面滑动。这一类方法包括随机有限元法<sup>[3-4]</sup>、随机极限平衡法<sup>[5]</sup>、极限分析法<sup>[6-7]</sup>等。在考虑土体参数空间变异性时, 该方法每次模拟都需要离散随机场, 然后进行确定性分析计算边坡的最小安全系数, 并通过蒙特卡洛模拟计算失效概率。这个过程往往需要花费较多的计算资源。第 2 种方法则通过选取若干个具有代表性的滑动面作为研究对象, 并将这些代表性滑动面构成的代理系统近似为边坡系统。这样, 通过计算代理系统的可靠度就可以估计边坡系统的可靠度<sup>[1, 8-9]</sup>。该方法认识到不同滑动面虽然位置不同, 但是它们具有共同 (或者相关) 的土体参数, 其安全系数也是相关的。Zhang 等<sup>[1]</sup>研究表明, 若一组滑动面的安全系数高度相关, 则其极限状态方程在标准正态空间中近似平行。根据可靠度指标的几何意义, 这一组滑动面构成的串联系统的可靠度近似等于这一组滑动面中的最小可靠度, 此时该最小可靠度对应的滑动面就是一个代表性滑动面。代表性滑动面方法提高了边坡系统可靠度分析的效率, 得到了较为广泛的应用<sup>[10-12]</sup>。

在考虑空间变异性时, 需要将土体参数随机场离散为很多个随机变量, 这导致边坡系统的输入参数众多, 计算各个失效模式之间的相关系数相对困难。此时, 通常的做法是仅选取最小可靠度滑动面来近似边坡系统<sup>[13-14]</sup>, 这种方法往往会高估边坡的可靠度。另一种处理方法是忽略土体水平方向的空间变异性, 仅考虑其竖向的空间变异性。此时, 边坡系统的输入参数可控, 各个失效模式之间的相关系数也可求。基于这一假设, 郑栋等<sup>[8]</sup>通过离散一维随机场, 采用近似相关系数和 Pearson 相关系数, 计算了相关失效模式下边坡的系统可靠度。Li 等<sup>[9]</sup>考虑土体参数在竖向上的空间变异性, 离散一维随机场, 采用风险聚类法识别代表性滑动面, 得到了边坡的可靠度。然而, 在无法忽视土体参数水平方向上的空间变异性时, 识别代表性滑动面时涉及到的参数很多, 采用上述方法计算各个失效模式之间的相关系数往往非常困难。

本文针对饱和黏土边坡, 将不排水抗剪强度  $S_u$

在圆弧滑动面上局部平均, 得到了局部平均后的等效参数及其统计特性, 并推导了不同滑动面等效参数之间的相关系数, 得到了不同失效模式之间的相关系数。通过综合考虑潜在滑动面的可靠度指标和失效模式之间的相关系数提出了代表性滑动面的逐步搜索方法, 并计算了边坡的系统失效概率。最后, 针对 3 个边坡案例, 利用本文的方法进行分析, 并与相关结果进行比较, 结果验证了本文方法的可靠性。

## 2 考虑局部平均效应的等效参数

### 2.1 等效参数的方差折减系数

对图 1 所示饱和黏土边坡, 在圆弧条分法下, 其安全系数为

$$F_s = \frac{\sum S_{ui} \Delta l_i}{\sum \Delta W_i \sin \alpha_i} \quad (1)$$

式中:  $S_{ui}$  为土条底部的不排水抗剪强度;  $\Delta l_i$  为土条底边长度;  $\Delta W_i$  为土条重度;  $\alpha_i$  为土条倾角。

在考虑空间变异性时, 往往需要离散随机场得到土条底部位置处的土体参数<sup>[14]</sup>。这个过程需要耗费大量的计算资源。Suchomei<sup>[15]</sup>、胡长明<sup>[16]</sup>等认为可以将随机场参数在滑动面上局部平均, 利用局部平均后的等效参数将空间变异性土体转化为等效的均质土体。本研究将延续这个想法, 在圆弧滑动面中引入该等效参数。

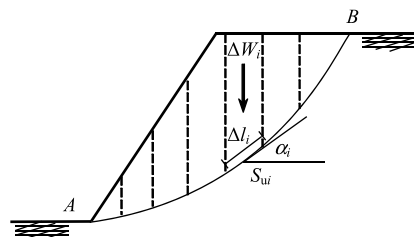


图 1 黏性土坡的 Bishop 条分法  
Fig.1 Bishop method for cohesive slope

如图 2 所示的边坡剖面中,  $P(x, y)$  为土体参数随机场, 其均值和方差分别为  $\mu$  和  $\sigma^2$ 。圆弧滑动面  $L$  的半径为  $R$ , 圆心坐标为  $(X, Y)$ , 以圆心为中心建立极坐标系, 圆弧两端点对应的极角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。随机场在滑动面上局部平均后的等效参数  $P_L$  定义为一个曲线积分:

$$P_L = \int_L P(x, y) ds / L \quad (2)$$

式中:  $L$  为圆弧曲线的长度。根据该定义, 并结合

式(1)可以发现, 饱和黏性土坡的安全系数与不排水抗剪强度的等效参数呈线性关系。计算等效参数  $P_L$  的均值和方差, 得

$$\left. \begin{aligned} E[P_L] &= \mu \\ D[P_L] &= \sigma^2 \cdot \gamma(\theta_1, \theta_2, R, \rho) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中:  $\gamma$  为等效参数的方差折减系数;  $\rho$  为随机场的相关函数。常用的相关函数有指数型相关函数、高斯型相关函数等。对于指数型相关函数, 有

$$\rho(\tau_1, \tau_2) = \exp \left[ -2 \left( \frac{|\tau_1|}{\delta_1} + \frac{|\tau_2|}{\delta_2} \right) \right] \quad (4)$$

对于高斯型相关函数, 有

$$\rho(\tau_1, \tau_2) = \exp \left[ -\pi \left( \left( \frac{\tau_1}{\delta_1} \right)^2 + \left( \frac{\tau_2}{\delta_2} \right)^2 \right) \right] \quad (5)$$

经过推导(详见附录), 方差折减系数  $\gamma$  计算式为

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\theta_1, \theta_2, R, \rho) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\xi_1, \xi_2) d\alpha_1 d\alpha_2 / (\theta_2 - \theta_1)^2 \\ \xi_1 &= R(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \\ \xi_2 &= R(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由此可见, 随机场的局部平均效应并不影响等效参数的均值, 但是其方差要在随机场的“点”方差基础上进行折减, 折减的程度与随机场的相关函数、滑动面的位置和滑动面的长度相关。值得说明的是, 当随机场相关关系取为指数相关关系时, 此处得到的方差折减系数计算公式与文献[16]等效。

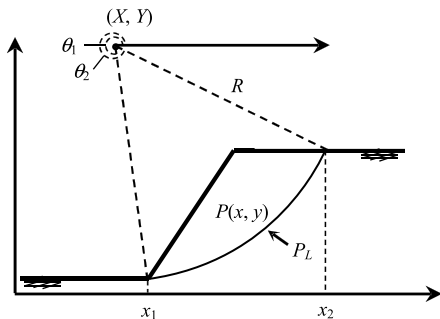


图2 圆弧滑动面下的等效参数

Fig.2 The equivalent parameter of circular slip surface

## 2.2 等效参数之间的相关系数

假设图3中两个滑动面为  $L_1$  和  $L_2$ , 滑动面  $L_1$  的圆心坐标为  $(X_1, Y_1)$ , 半径为  $R_1$ , 极坐标下两圆弧

端点的极角分别为  $\theta_{11}$  和  $\theta_{12}$ , 滑动面  $L_2$  亦如是。随机场  $P(x, y)$  在两圆弧上局部平均后的等效参数分别为  $P_{L1}$  和  $P_{L2}$ , 则两个等效参数之间的相关系数为

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= \int_{\theta_{11}}^{\theta_{12}} \int_{\theta_{21}}^{\theta_{22}} \rho(\xi_1, \xi_2) d\alpha_1 d\alpha_2 / \left[ \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (\theta_{22} - \theta_{21}) (\theta_{12} - \theta_{11}) \right] \\ \xi_1 &= X_1 + R_1 \cos \alpha_1 - X_2 - R_2 \cos \alpha_2 \\ \xi_2 &= Y_1 + R_1 \sin \alpha_1 - Y_2 - R_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中:  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$  分别为滑动面等效参数的方差折减系数, 推导过程详见附录。

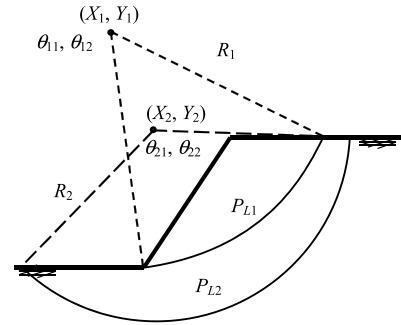


图3 等效参数之间的相关系数

Fig.3 Correlation coefficient between two equivalent parameters

## 3 不排水边坡系统可靠度

### 3.1 基于等效参数的响应面法

如前所述, 引入等效参数后, 对于某特定滑动面, 饱和黏性土坡的安全系数为不排水抗剪强度等效参数的线性函数。故可用一次函数作为该滑动面的功能函数, 即

$$g(\mathbf{X}) = F_S - 1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i - 1 \quad (8)$$

式中:  $g$  为响应面函数;  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  为响应面方程的基本变量;  $n$  为变量个数, 一般为滑动面穿过土层的数目;  $a_i$  为待定参数。式(8)中共有  $n$  个待定参数, 为了确定这  $n$  个待定参数, 需要进行  $n$  次抽样计算。在随机变量均值处选取样本点, 即可满足要求。

以如图4所示的2层边坡为例, 简要说明等效参数在响应面方程中的应用。图中, 滑动面  $S_i$  和  $S_j$  穿过两层土, 它们在两层土中对应的等效参数分别为  $c_i^{(1)}$ 、 $c_i^{(2)}$  和  $c_j^{(1)}$ 、 $c_j^{(2)}$ , 其中, 上标表示土层, 下标表示滑动面。此时滑动面的响应面函数分别为

$$\left. \begin{aligned} g_i &= g_i(c_i^{(1)}, c_i^{(2)}) \\ g_j &= g_j(c_j^{(1)}, c_j^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

当不同土层的参数相互独立时,其对应的等效参数,例如  $c_i^{(1)}$  和  $c_i^{(2)}$ ,也是相互独立的。而在同一土层中的等效参数,例如  $c_i^{(1)}$  和  $c_j^{(1)}$ ,则是相关的,其相关系数可由式(7)计算得到。

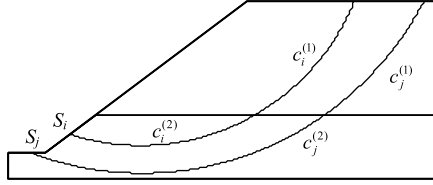


图4 双层土坡的滑动面及其等效参数

Fig.4 Two illustrative slip surfaces and its equivalent parameters of a two-layered soil slope

采用一次可靠度方法(FORM)计算单失效模式下边坡的可靠度指标。根据经典FORM理论,可靠度指标 $\beta$ 是标准正态化空间中原点到极限状态曲面的最短距离<sup>[17]</sup>,即

$$\beta = \min_{g=0} \sqrt{\alpha^T \alpha} \quad (10)$$

式中: $g=0$ 为极限状态方程; $\alpha$ 为极限状态方程中相互独立的标准正态化变量。当等式右边取得最小值时,最小值点(记为 $\alpha^*$ )为设计验算点。本研究中,所有变量均为对数正态分布,通过取对数操作可转化为正态分布 $\ln(X)$ ,再通过 $(\ln(X_i) - \mu_i)/\sigma_i$ 即可转化到标准正态空间。由于对数正态分布转化到正态分布为非线性变换,随机变量之间的相关系数有所改变,但其差别较小,对计算结果的影响可忽略不计<sup>[18]</sup>,本文不考虑该影响。同时,对于式(10)描述的最优化问题,可通过Matlab的优化函数fmincon求解。

### 3.2 不同失效模式之间的相关系数

设两个失效模式 $g_i \leq 0$ 和 $g_j \leq 0$ (分别用 $F_i$ 和 $F_j$ 表示,下同)的设计验算点分别为 $\alpha_i^*$ 和 $\alpha_j^*$ 。当不考虑土体参数的空间变异性时, $\alpha_i^*$ 和 $\alpha_j^*$ 中相对应的参数完全相关,这也就是文献[1, 19]中的情况。此时,两个失效模式之间的相关系数可由下式计算<sup>[19]</sup>:

$$\lambda_{ij} = \frac{\alpha_i^{*T} \alpha_j^*}{\beta_i \beta_j} \quad (11)$$

但是,在考虑空间变异性时,设计验算点 $\alpha_i^*$ 和 $\alpha_j^*$ 中相对应的参数并不是完全相关的,例如式(9)中的 $c_i^{(1)}$ 和 $c_j^{(1)}$ ,它们的相关系数由式(7)描述。由于此相关性存在,两个失效模式之间的相关系数

应比不考虑空间变异性时要小。经推导,引入等效参数后两个失效模式之间的相关系数为

$$\lambda_{ij} = \frac{\alpha_i^{*T} [r_{ij}^{(kk)}] \alpha_j^*}{\beta_i \beta_j} \quad (12)$$

式中: $[r_{ij}^{(kk)}]$ 为对角矩阵,其对角线上的元素 $r_{ij}^{(kk)}$ 表示在失效模式 $F_i$ 和 $F_j$ 下,随机场局部平均后的等效参数 $x_i^{(k)}$ 和 $x_j^{(k)}$ 之间的相关系数。上标 $k$ 表示土层编号,下标 $i$ 和 $j$ 表示滑动面编号。同样的,当不同土层的参数相互独立时,其对应的等效参数也相互独立,而同一土层中的等效参数则相关,因此 $[r_{ij}^{(kk)}]$ 为对角矩阵。

$$[r_{ij}^{(kk)}] = \begin{bmatrix} r_{ij}^{(11)} & & & \\ & r_{ij}^{(22)} & & \\ & & \dots & \\ & & & r_{ij}^{(nn)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

### 3.3 系统失效概率计算

如前文所述,边坡系统是一个由无数潜在滑动面串联而成的系统,其系统失效概率可由若干个(设为 $N$ )相关的代表性失效模式来近似。设这 $N$ 个代表性失效模式 $F_k$ ( $k=1, 2, \dots, N$ )的可靠度指标为 $\beta=[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]$ ,各滑动面失效模式之间的相关系数矩阵为 $A$ ,则该代理系统的失效概率计算实际上就是求多元正态分布累积概率函数的值,即

$$P_f(\bigcup_{k=1}^N F_k) = 1 - P_f(\bigcap_{k=1}^N \overline{F_k}) = 1 - P_f(\bigcap_{k=1}^N \overline{F_k}) = 1 - \Phi(\beta, A) \quad (14)$$

式中: $\cup$ 表示各事件的并集; $\cap$ 表示各事件的交集; $\overline{F_k}$ 表示事件 $F_k$ 的补集; $\Phi$ 为多元正态分布的累积概率函数,该多元正态分布的均值为0,协方差矩阵为 $A$ 。

关键问题是如何在大量潜在滑动面中筛选出代表性滑动面。Zhang等<sup>[1]</sup>将最小可靠度滑动面作为第1个代表性滑动面,并预先选定失效模式之间的相关系数阈值 $\lambda_0$ ,通过逐步剔除与当前代表性滑动面相关性过大( $\lambda > \lambda_0$ )的滑动面来筛选代表性滑动面。在不考虑空间变异性时,土体参数在相同土层中完全相关,失效模式之间的相关系数往往都比较大。根据Zhang等<sup>[1]</sup>的分析,对简单均质边坡,当相关系数阈值 $\lambda_0 = 0.6$ 时,就能得到收敛的结果。然而,在考虑空间变异性时,由于不同滑动面之间的等效参数相关性小于1,不同失效模式之间的相关系数(式(12))往往比较小,要使得计算得到的

系统失效概率收敛,相关系数阈值 $\lambda_0$ 要取比较大的值,这样代表性滑动面的个数势必急剧增加。另一方面,如式(14)所示,代表性滑动面构成的代理系统的失效概率与可靠度指标和相关系数矩阵都相关。综合考虑待失效模式的可靠度指标和它们之间的相关系数来搜索代表性滑动面是一种更为合理的方法。

基于上述考虑,本文提出了一种基于优化分析的代表性滑动面搜索方法。该方法首先将最小可靠度滑动面作为第1个代表性滑动面,而下一个代表性滑动面应该使得新的代理模型的系统失效概率最大,即

$$\max_{S_1} P_{f_1} = 1 - \Phi_0(\beta_1) \quad (15)$$

$$\max_{S_k} P_{f_k} = 1 - \Phi \left\{ [\beta_{k-1}, \beta_k], \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1} & \lambda_{k-1} \\ \lambda_{k-1}^T & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (16)$$

式中: $S_1$ 为第1个代表性滑动面; $\beta_1$ 为第1个代表性滑动面的可靠度指标; $\Phi_0$ 为标准正态分布的累计分布函数; $k=2,3,4,\dots$ ,表示代表性滑动面的个数; $S_k$ 表示第 $k$ 个代表性滑动面; $\beta_{k-1}$ 和 $\mathbf{A}_{k-1}$ 分别为前 $k-1$ 个代表性滑动面的可靠度指标向量和相关系数矩阵; $\beta_k$ 为第 $k$ 个代表性滑动面的可靠度指标; $\lambda_{k-1}$ 为第 $k$ 个代表性滑动面与前 $k-1$ 个代表性滑动面的相关系数向量。

在搜索代表性滑动面的过程中,随着代表性滑动面个数增加,代理模型的失效概率逐渐收敛,当前后两次计算结果小于给定的允许误差 $\varepsilon$ 时,可结束整个搜索过程。逐步搜索代表性滑动面的计算流程如下:

(1) 根据式(15)搜索最小可靠度滑动面,并将其作为第1个代表性滑动面,计算当前代理系统的失效概率。

(2) 根据式(16)搜索下一个代表性滑动面,得到新代理系统的失效概率,并与前代理系统的失效概率比较,计算相对误差。

(3) 当相对误差大于给定的允许误差时,重复步骤(2),否则计算结束。

根据式(15)、(16)的描述,代表性滑动面的搜索问题实际是个最优化问题,即确定一个滑动面,使得式(15)(或者式(16))取最大值。在圆弧滑动面假设下,滑动面由其圆心坐标 $X, Y$ 以及半径 $R$ 完全刻画,此时代表性滑动面的搜索就是确定3个变量( $X, Y, R$ ),使得式(15)、(16)描述的目标函数取最大值。本研究采用遗传算法求解该问题。下

面以最小可靠度滑动面搜索为例,简述遗传算法的计算过程:

(1) 随机生成若干个潜在滑动面(即若干组控制变量 $X, Y, R$ ),计算对应滑动面的等效参数,建立响应面方程,并分别利用式(11)和式(15)计算其可靠度指标和目标函数值。

(2) 按一定比例从父代中选取适应度高(目标函数值大)的滑动面,并对其控制参数( $X, Y, R$ )进行交叉、变异和重组操作,得到一组新的滑动面,并计算其目标函数值。

(3) 重复步骤(2),直到计算达到预定的最大遗传代数。

在迭代过程中,由于交叉、变异、重组等操作,上一代的优秀基因有较大概率遗传给下一代,使下一代中的最优个体逐渐接近目标函数的最优解,即搜索得到最小可靠度滑动面。同理,在逐步搜索代表性滑动面过程中,也是同样的步骤,此时目标函数为式(16)。对于遗传算法的更多信息,可参考文献[20]。

## 4 算例分析

### 4.1 案例1

考虑如图5所示的单层边坡,该边坡的计算模型和参数选自文献[5]。边坡高为5 m,坡度为1:2,土体重度为20 kN/m<sup>3</sup>。土体不排水抗剪强度 $S_u$ 服从对数正态分布,其均值和变异系数分别为23 kPa和0.3。同时,采用指数相关函数描述 $S_u$ 的空间相关性,其水平向和竖向相关长度分别为 $\delta_1 = 40$  m和 $\delta_2 = 4$  m。采用Bishop方法计算边坡滑动面的安全系数,确定性分析结果显示该边坡安全系数为1.357,与文献[5]的结果(1.356)非常吻合。由于 $S_u$ 服从对数正态分布,其等效参数为无数个对数正态分布之和,其真实分布介于正态分布和对数正态分布之间,且更接近对数正态分布<sup>[21]</sup>。本文假设等效参数服从对数正态分布,并以此进行分析。

记确定性滑动面失效概率为 $P_{f-F}$ ,计算结果显

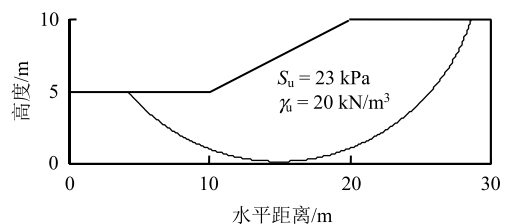


图5 案例1单层边坡( $F_s = 1.357$ )

Fig.5 Case 1 a simple slope ( $F_s = 1.357$ )

示, 确定性滑动面的失效概率为 0.033 0, 这个结果与文献[5]给出的 0.031 6 较为吻合。

通过逐步搜索边坡的代表性滑动面计算其系统失效概率(记为  $P_{fs}$ ), 并设置收敛条件为  $\varepsilon = 1\%$ 。经过 13 次搜索后循环终止, 得到 13 个代表性滑动面。此时边坡失效概率为 0.072 4, 比文献[5]的结果(0.076 0)略小。图 6 给出了边坡系统失效概率随代表性滑动面个数增加的收敛曲线。仅有一个代表性滑动面时(即临界概率滑动面), 边坡失效概率为 0.033 4。随着代表性滑动面个数增加, 代理系统的失效概率也增加但逐渐收敛于边坡系统失效概率。

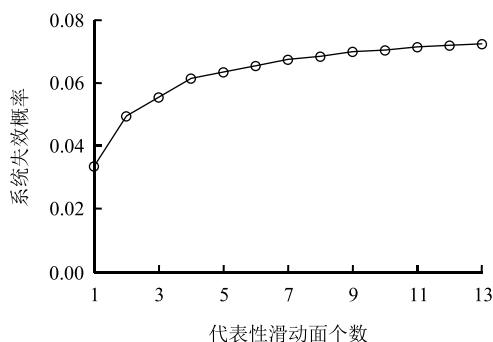


图 6 案例 1 系统失效概率收敛曲线

Fig.6 Convergence of system failure probability(case 1)

图 7 绘制了前 4 个代表性滑动面的位置。这 4 个代表性滑动面的失效概率依次为 0.033 4、0.027 3、0.017 3、0.032 2, 它们之间的相关系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.734 & 0.562 & 0.901 \\ 0.734 & 1 & 0.847 & 0.877 \\ 0.562 & 0.847 & 1 & 0.683 \\ 0.901 & 0.877 & 0.683 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

可以看出, 由于  $S_1$  和  $S_4$  的几何位置比较接近, 其土体参数的相关性比较强, 导致其失效概率的数值比较接近, 两失效模式之间的相关性也比较强

( $\lambda_{14} = 0.901$ )。此时, 虽然  $S_4$  的失效概率比  $S_2$  和  $S_3$  都要大, 但是由于它和  $S_1$  的相关性太强, 导致其对代理系统的失效概率贡献度还不如  $S_2$  和  $S_3$ 。另一方面, 尽管  $S_3$  与  $S_1$  的相关系数小于  $S_2$  与  $S_1$  的相关系数, 但是  $S_3$  的失效概率比  $S_2$  小, 导致  $S_2$  对代理系统失效概率的贡献大于  $S_3$ 。这说明在甄选代表性滑动面时, 综合考虑各个潜在滑动面的失效概率(可靠度指标)和相关系数是更为合理的做法。

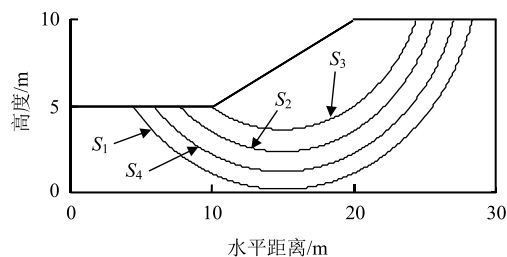


图 7 案例 1 前 4 个代表性滑动面分布

Fig.7 Locations of the first four representative slip surfaces(case 1)

表 1 列出了前 4 个代表性滑动面的响应面方程及其分析结果, 其中  $c$  为土体的不排水抗剪强度等效参数。对这 4 个代表性滑动面进行 3 类蒙特卡洛模拟 ( $1 \times 10^5$  次): ①等效参数+响应面代理模型; ②等效参数+Bishop 条分法; ③随机场离散+Bishop 条分法。前两类蒙特卡洛模拟用于验证响应面方程的适用性, 第 3 类蒙特卡洛模拟则用于验证等效参数的适用性。在离散随机场时, 对滑动面土条底部中点的抗剪强度参数随机场进行抽样。由于此时滑动面个数较少, 可对每个滑动面划分土条后, 获得这 4 个滑动面土条底部中点的坐标集, 再通过协方差矩阵分解法抽样得到滑动面土条相应位置处的随机场参数。此时, 土条厚度决定了随机场的离散精度, 这里取土条厚度为 0.1 m。

表 1 案例 1 前 4 个代表性滑动面的结果

Table 1 The results of the first four representative slip surfaces(case 1)

| 代表性滑动面 | 响应面方程 $g(X)$         | 方差折减系数 $\lambda$ | $\mu_{ln(X)}$ | $\sigma_{ln(X)}$ | 失效概率              |                  |                   |
|--------|----------------------|------------------|---------------|------------------|-------------------|------------------|-------------------|
|        |                      |                  |               |                  | MCS: 等效参数+响应面代理模型 | MCS: 等效参数+Bishop | MCS: 随机场离散+Bishop |
| $S_1$  | $g_1 = 0.059 0c - 1$ | 0.286 4          | 3.123         | 0.159 5          | 0.033 2           | 0.033 2          | 0.031 7           |
| $S_2$  | $g_2 = 0.062 3c - 1$ | 0.362 1          | 3.120         | 0.179 1          | 0.027 4           | 0.027 4          | 0.025 7           |
| $S_3$  | $g_3 = 0.066 4c - 1$ | 0.415 2          | 3.117         | 0.191 5          | 0.017 4           | 0.017 4          | 0.016 1           |
| $S_4$  | $g_4 = 0.060 2c - 1$ | 0.318 9          | 3.121         | 0.168 2          | 0.032 3           | 0.032 3          | 0.030 5           |

从表中可以看出, 采用等效参数的失效概率计算结果(基于竖向条分法的蒙特卡洛模拟和基于响应面代理模型的蒙特卡洛模拟)非常接近, 这表明

响应面方程作为竖向条分法的代理模型是适用的。另一方面, 直接离散随机场进行蒙特卡洛模拟得到的失效概率比前三者略微偏小, 这一结果说明等效

参数还是会带来一定的误差,但总体上,还是可以接受的。对随机场蒙特卡洛模拟计算得到的4组安全系数进行分析,计算其 Pearson 相关系数矩阵,得

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0.733 & 0.560 & 0.901 \\ 0.733 & 1 & 0.847 & 0.876 \\ 0.560 & 0.847 & 1 & 0.682 \\ 0.901 & 0.876 & 0.682 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

可以发现,这一结果与本文计算得到的前4个失效模式之间的相关系数矩阵几乎相同,这也验证了本文方法的正确性。

改变随机场的水平波动范围和竖向波动范围,重新利用本文的方法进行分析,结果列于表2。从表中可以看出,随着随机场相关性增强(相关长度增大),满足相同精度( $\varepsilon=1\%$ )的代表性滑动面个数减小,边坡失效概率增大。由式(12)可知,更强的相关性增加了失效模式之间的相关性,这导致代理模型所需的代表性滑动面个数减小。同时,随机场相关长度增大,导致等效参数的方差折减函数增大,即等效参数的方差偏大,失效概率当然也随之增大。

表2 案例1不同随机场相关长度的结果对比

Table 2 Comparison of results under different correlation lengths(case 1)

| $\delta_1/m$ | $\delta_2/m$ | 代表性滑动面个数 | 失效概率    |         | 误差/% | 失效概率类型   |
|--------------|--------------|----------|---------|---------|------|----------|
|              |              |          | 本文结果    | 文献[5]   |      |          |
| 40           | 4            | 13       | 0.033 0 | 0.031 6 | 4.4  | $P_{FF}$ |
|              |              |          | 0.072 4 | 0.076 0 | -4.7 | $P_{FS}$ |
| 40           | 8            | 10       | 0.063 0 | 0.062 1 | 1.4  | $P_{FF}$ |
|              |              |          | 0.101 1 | 0.109 1 | -7.3 | $P_{FS}$ |
| 80           | 4            | 9        | 0.044 4 | 0.042 2 | 5.2  | $P_{FF}$ |
|              |              |          | 0.084 2 | 0.089 4 | -5.8 | $P_{FS}$ |

## 4.2 案例2

图8的边坡案例选自文献[9, 22]。边坡高为10 m,坡度为1:2,土体重度为20 kN/m<sup>3</sup>。土体不排水抗剪强度 $S_u$ 服从对数正态分布,其均值和变异系数分别为40 kPa和0.3。用指数相关函数描述土体参数随机场的空间相关性。同时,忽略土体参数在水平方向上的不均匀性,仅考虑其竖向不均匀性,即 $\delta_1 = \infty$ 和 $\delta_2 = \delta < \infty$ 。确定性分析结果显示该边坡安全系数为1.178,与文献[9]中的1.18和文献[22]中的1.178吻合。

改变竖向相关长度 $\delta$ 的取值,用本文的方法计算边坡失效概率,计算结果见图9。可以发现,本文的计算结果和文献[22]的结果吻合较好。随着 $\delta$ 增大,边坡失效概率增加,但其增速逐渐减小。

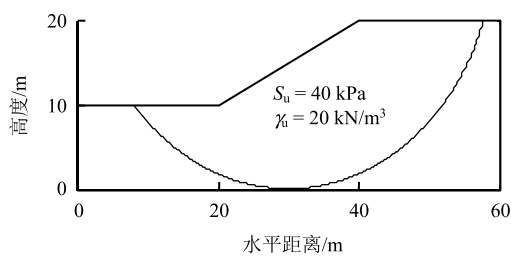


图8 案例2单层边坡( $F_s = 1.178$ )

Fig.8 Case 2 a simple slope ( $F_s = 1.178$ )

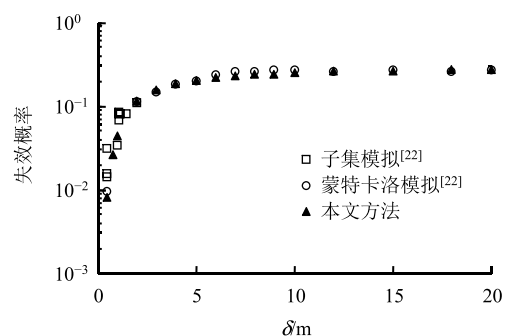


图9 案例2竖向相关长度对边坡失效概率的影响

Fig.9 Effect of vertical correlation length on failure probability(case 2)

当 $\delta=5$  m时,本文的方法筛选出了9个代表性滑动面,这9个代表性滑动面构成的代理模型失效概率为0.198 6,与文献[22]的0.197 8和文献[9]的0.189 0较为接近,其中,第1个代表性滑动面对系统失效概率的贡献度为60.6%。当 $\delta=10$  m时,本文的方法筛选出了8个代表性滑动面,这8个代表性滑动面构成的代理模型失效概率为0.243 2,与文献[22]的0.260 2和文献[9]的0.239 0较为接近,其中第1个代表性滑动面对系统失效概率的贡献度达到74.1%。可以发现,随着 $\delta$ 增加,随机场参数的相关性增强,第1个代表性滑动面对边坡系统失效概率的贡献增大,代理模型需要的代表性滑动面个数也随之减小。事实上,对于单层不排水边坡,根据式(12),当 $\delta = \infty$ 时,任意两个失效模式之间的相关系数都为1,仅需要一个代表性滑动面就可以完全表示边坡系统的失效概率。

## 4.3 案例3

图10为一双层不排水边坡,文献[19, 23-24]用随机变量描述土体参数的不确定性,对该边坡的可靠度进行了研究。蒋水华等[25]考虑土体参数的空间变异性,研究了该低概率水平边坡的可靠度问题。如图10所示边坡两层土的饱和重度均为19 kN/m<sup>3</sup>,第1层土的不排水抗剪强度为120 kPa,第2层土的

不排水抗剪强度为 160 kPa。采用对数正态分布描述两层土的不排水抗剪强度,第 1 层土的均值和变异系数分别为 120 kPa 和 0.3,第 2 层土的均值和变异系数分别为 160 kPa 和 0.3。同时,采用高斯相关函数描述土体参数的空间相关性,水平向和竖向相关长度分别取为  $\delta_1 = 40$  m 和  $\delta_2 = 4$  m。确定性分析结果显示,该边坡的安全系数为 1.990,与文献[19]的 1.997、文献[24]的 1.992 和文献[25]的 1.993 接近。

采用本文的方法计算该边坡的系统失效概率,经过 5 次代表性滑动面搜索后计算终止,得到边坡

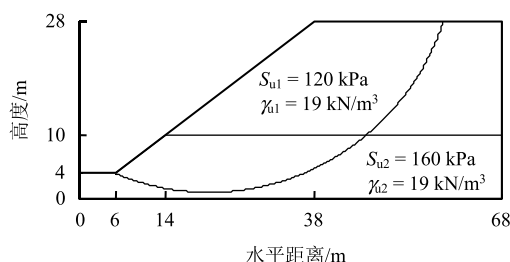


图 10 案例 3 双层边坡 ( $F_s = 1.993$ )

Fig.10 Case 3 a two-layered slope ( $F_s = 1.993$ )

的系统失效概率为  $1.65 \times 10^{-7}$ 。这一结果与文献[25]中的  $1.14 \times 10^{-7}$  在同一量级,但相对误差较大。

保持其他参数不变,将土体不排水抗剪强度的变异系数从 0.3 增加至 0.4,重新采用本文的方法进行计算。搜索得到 5 个代表性滑动面后计算终止,得到边坡的失效概率为  $1.39 \times 10^{-4}$ 。图 11 绘制了前 3 个代表性滑动面的位置分布。这 3 个滑动面的等效参数、响应面方程及其分析结果汇总于表 3,其中  $c_1$ 、 $c_2$  分别为第 1 层土和第 2 层土的不排水抗剪强度等效参数。此时,3 个代表性滑动面的相关系数

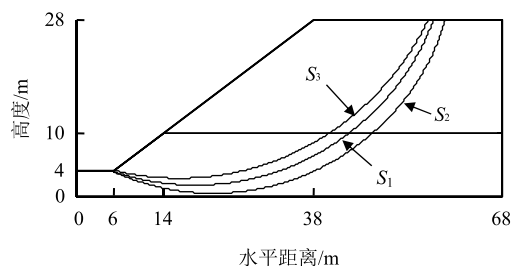


图 11 案例 3 前 3 个代表性滑动面分布 ( $COV = 0.4$ )

Fig.11 Locations of the first three representative slip surfaces(case 3,  $COV = 0.4$ )

表 3 案例 3 前 3 个代表性滑动面的结果 ( $COV = 0.4$ )

Table 3 The results of the first three representative slip surfaces(case 3,  $COV = 0.4$ )

| 代表性<br>滑动面 | 响应面方程<br>$g(X)$                     | 方差折减系数 $\gamma_X$    | $\mu_{ln(X)}$        | $\sigma_{ln(X)}$     | 失效概率                    |                         |                          |
|------------|-------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
|            |                                     |                      |                      |                      | MCS: 等效<br>参数+响应<br>面方程 | MCS: 等效<br>参数+竖向<br>条分法 | MCS: 随机<br>场离散+竖<br>向条分法 |
| $S_1$      | $g_1 = 0.00498c_1 + 0.00874c_2 - 1$ | $[0.2014, 0.4147]^T$ | $[4.7716, 5.0431]^T$ | $[0.1781, 0.2535]^T$ | $4.88 \times 10^{-5}$   | $4.88 \times 10^{-5}$   | $3.10 \times 10^{-5}$    |
| $S_2$      | $g_2 = 0.00445c_1 + 0.00911c_2 - 1$ | $[0.2017, 0.3620]^T$ | $[4.7716, 5.0470]^T$ | $[0.1782, 0.2373]^T$ | $3.47 \times 10^{-5}$   | $3.47 \times 10^{-5}$   | $1.84 \times 10^{-5}$    |
| $S_3$      | $g_3 = 0.00570c_1 + 0.00845c_2 - 1$ | $[0.2021, 0.4573]^T$ | $[4.7716, 5.0399]^T$ | $[0.1784, 0.2657]^T$ | $3.38 \times 10^{-5}$   | $3.38 \times 10^{-5}$   | $1.95 \times 10^{-5}$    |

分别为:  $\lambda_{12} = 0.891$ ,  $\lambda_{13} = 0.912$ ,  $\lambda_{23} = 0.696$ 。

由于失效概率在  $10^{-5} \sim 10^{-4}$  量级之间,要使蒙特卡洛模拟结果具有一定的可靠性,本文对这 3 个代表性滑动面进行  $2 \times 10^7$  次蒙特卡洛模拟。离散随机场时,取土条厚度为 0.2 m。从表中可以看出,由于安全系数与等效参数呈线性关系,基于竖向条分法的蒙特卡洛模拟和基于响应面代理模型的蒙特卡洛模拟结果相同。对随机场蒙特卡洛模拟计算得到的 3 组(每组  $2 \times 10^7$  个)安全系数进行分析,计算其 Pearson 相关系数,得:  $\lambda'_{12} = 0.872$ ,  $\lambda'_{13} = 0.892$ ,  $\lambda'_{23} = 0.644$ 。这一结果与本文计算结果相近。同时,离散随机场蒙特卡洛模拟得到的滑动面失效概率比等效参数的结果要小,这与表 1 的结果类似。

文献[19]不考虑土体参数的空间变异性,人为选定两条代表性滑动面(仅穿过第 1 层土和同时穿

过两层土)进行分析,得到该边坡的失效概率范围为  $4.02 \times 10^{-3} \sim 4.11 \times 10^{-3}$ 。利用本文的方法,取  $\delta_1 = \infty$  和  $\delta_2 = \infty$ ,搜索得到 2 个代表性滑动面后计算收敛,得到边坡的系统失效概率为  $4.20 \times 10^{-3}$ 。

表 4 案例 3 边坡失效概率的结果汇总

Table 4 Summary of failure probability(case 3)

| $\delta_1$<br>/m | $\delta_2$<br>/m | COV      |          | 代表性滑<br>动面个数 | 失效概率                  |                       |                                                |
|------------------|------------------|----------|----------|--------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------------------------|
|                  |                  | $S_{u1}$ | $S_{u2}$ |              | 本文                    | 文献[25]                | 文献[19]                                         |
| 40               | 4                | 0.3      | 0.3      | 5            | $1.65 \times 10^{-7}$ | $1.14 \times 10^{-7}$ | —                                              |
| 40               | 4                | 0.4      | 0.4      | 5            | $1.39 \times 10^{-4}$ | $1.12 \times 10^{-4}$ | —                                              |
| $\infty$         | $\infty$         | 0.3      | 0.3      | 2            | $4.20 \times 10^{-3}$ | $4.04 \times 10^{-3}$ | $4.02 \times 10^{-3} \sim 4.11 \times 10^{-3}$ |

## 5 结 论

本文基于随机场局部平均后的等效参数和一

次可靠度方法, 通过分析不同滑动面失效模式之间的相关性, 提出了考虑不排水强度空间变异性的黏土边坡系统可靠度分析方法。通过分析 3 个边坡案例的失效概率, 探讨了本文方法的有效性, 得到了以下主要结论:

(1) 不排水抗剪强度随机场沿滑动面局部平均后的等效参数能够描述相应滑动面土体参数的不确定性, 等效参数之间的相关性对失效模式之间的相关系数有影响。本文提出的方法能够较好地逼近边坡的系统失效概率。

(2) 随着随机场的空间相关性增强, 不同失效模式之间的相关系数增加, 第 1 个代表性滑动面对系统失效概率的贡献度随之增加, 计算收敛时代理模型所需的代表性滑动面个数也随之减少。对于单层不排水边坡, 在不考虑空间变异性时, 仅需要一个代表性滑动面就可以得到边坡的系统失效概率。

(3) 本文方法仅适用于饱和不排水 ( $\varphi=0$ ) 黏土边坡的情况。此时, 边坡安全系数与等效参数呈线性关系。当  $\varphi \neq 0$  时, 边坡安全系数与等效抗剪强度参数不再呈线性关系, 随机场沿滑动面局部平均后的等效参数是否能表示整个滑动面上的参数变异性尚不明确, 还需要进一步分析。

## 参 考 文 献

- [1] ZHANG J, ZHANG L M, TANG W H. New methods for system reliability analysis of soil slopes[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2011, 48(7): 1138-1148.
- [2] HONG H P, ROH G. Reliability evaluation of earth slopes[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2008, 134(12): 1700-1705.
- [3] GRIFFITHS D V, FENTON G A. Probabilistic slope stability analysis by finite elements[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2004, 130(5): 507-518.
- [4] HUANG J S, GRIFFITHS D V, FENTON G A. System reliability of slopes by RFEM[J]. **Soils and Foundations**, 2010, 50(3): 343-353.
- [5] CHO S E. Probabilistic assessment of slope stability that considers the spatial variability of soil properties[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2010, 136(7): 975-984.
- [6] 陈朝晖, 雷坚, 黄景华, 等. 考虑参数空间变异性的边坡稳定可靠性有限元极限分析[J]. **岩土工程学报**, 2018, 40(6): 985-993.
- CHEN Zhao-hui, LEI Jian, HUANG Jing-hua, et al. Finite element limit analysis of slope stability considering spatial variability of soil strengths[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(6): 985-993.
- [7] 张小艳, 张立翔, 李泽. 基于塑性极限分析上限法理论的土质边坡可靠度分析[J]. **岩土力学**, 2018, 39(5): 1840-1850.
- ZHANG Xiao-yan, ZHANG Li-xiang, LI Ze. Reliability analysis of soil slope based on upper bound method of limit analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(5): 1840-1850.
- [8] 郑栋, 李典庆, 曹子君, 等. 土体参数空间变异性对边坡失效模式间相关性影响及系统可靠度的影响[J]. **岩土力学**, 2017, 38(2): 517-524.
- ZHENG Dong, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. Effect of spatial variability on correlation between slope failure modes and system reliability of slope stability[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(2): 517-524.
- [9] LI L, WANG Y, CAO Z J, et al. Risk de-aggregation and system reliability analysis of slope stability using representative slip surfaces[J]. **Computers and Geotechnics**, 2013, 53: 95-105.
- [10] JIANG S H, LI D Q, CAO Z J, et al. Efficient system reliability analysis of slope stability in spatially variable soils using Monte Carlo simulation[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2015, 141(2): 04014096.
- [11] LI L, CHU X. Multiple response surfaces for slope reliability analysis[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2015, 39(2): 175-192.
- [12] LOW B K, ZHANG J, TANG W H. Efficient system reliability analysis illustrated for a retaining wall and a soil slope[J]. **Computers and Geotechnics**, 2011, 38(2): 196-204.
- [13] CHO S E. Effects of spatial variability of soil properties on slope stability[J]. **Engineering Geology**, 2007, 92(3-4): 97-109.
- [14] JI J, LIAO H J, LOW B K. Modeling 2-D spatial variation in slope reliability analysis using interpolated autocorrelations[J]. **Computers and Geotechnics**, 2012, 40: 135-146.
- [15] SUCHOMEL R, MAŠÍN D. Comparison of different probabilistic methods for predicting stability of a slope in

- spatially variable  $c$ - $\phi$  soil[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(1-2): 132-140.
- [16] 胡长明, 袁一力, 梅源, 等. 基于二维随机场在圆弧曲线上局部平均化的边坡可靠度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, 39(2): 251-261.
- HU Chang-ming, YUAN Yi-li, MEI Yuan, et al. Slope reliability analysis based on local averaging of two-dimensional random field on an arc curve[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2020, 39(2): 251-261.
- [17] ANG A H S, TANG W H. Probability concepts in engineering planning and design, Vol II: decision, risk, and reliability[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.
- [18] CHO S E, PARK H C. Effect of spatial variability of cross-correlated soil properties on bearing capacity of strip footing[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2010, 34(1): 1-26.
- [19] JI J, LOW B K. Stratified response surfaces for system probabilistic evaluation of slopes[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2012, 138(11): 1398-1406.
- [20] ZOLFAGHARI A R, HEATH A C, MCCOMBIE P F. Simple genetic algorithm search for critical non-circular failure surface in slope stability analysis[J]. **Computers and Geotechnics**, 2005, 32(3): 139-152.
- [21] FENTON G A, ZHOU H, JAKSA M B, et al. Reliability analysis of a strip footing designed against settlement[C]// International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering. Rotterdam: San Francisco, 2003: 1271-1277.
- [22] WANG Y, CAO Z J, AU S K. Practical reliability analysis of slope stability by advanced Monte Carlo simulations in a spreadsheet[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2011, 48(1): 162-172.
- [23] CHING J, PHOON K K, HU Y G. Efficient evaluation of reliability for slopes with circular slip surfaces using importance sampling[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2009, 135(6): 768-777.
- [24] CHO E S. First-order reliability analysis of slope considering multiple failure modes[J]. **Engineering Geology**, 2013, 154: 98-105.
- [25] 蒋水华, 魏博文, 姚池, 等. 考虑概率分布影响的低概率水平边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(6):

1071-1080.

JIANG Shui-hua, WEI Bo-wen, YAO Chi, et al. Reliability analysis of soil slopes at low-probability levels considering effect of probability distributions[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(6): 1071-1080.

## 附录

### (1) 等效参数的均值与方差

根据式 (2) 的定义, 等效参数为随机场参数在滑动面上的局部平均, 有

$$E[P_L] = E\left[\int_L P(x, y) ds / L\right] = \int_L E[P(x, y)] ds / L = \int_L \mu ds / L = \mu \quad (A1)$$

$$D[P_L] = E\left[\int_L P(x, y) ds / L - \mu\right]^2 = E\left[\int_L P(x, y) ds / L - \int_L \mu ds / L\right]^2 = E\left[\int_L (P(x, y) - \mu) ds / L\right]^2 = E\left[\int_L (P(x, y) - \mu) ds \int_L (P(x', y') - \mu) ds' / L^2\right] = \frac{1}{L^2} \iint_{LL} E[(P(x, y) - \mu)(P(x', y') - \mu)] ds ds' \quad (A2)$$

根据相关函数和方差函数的关系, 有

$$E[(P(x, y) - \mu)(P(x', y') - \mu)] = C[(x, y), (x', y')] = \sigma^2 \rho[(x, y), (x', y')] = \sigma^2 \rho(x - x', y - y') \quad (A3)$$

同时, 用极坐标表示积分路径:  $x = X + R \cos(\alpha)$ ,  $y = Y + R \sin(\alpha)$ ,  $ds = R d\alpha$ , 代入式 (A2), 整理可得

$$D[P_L] = \frac{\sigma^2}{(\theta_2 - \theta_1)^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho[R(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), R(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)] d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (A4)$$

### (2) 等效参数之间的相关系数

首先计算等效参数的协方差, 与式 (A2) 类似, 有

$$\begin{aligned} \text{COV}(P_{L_1}, P_{L_2}) &= E[(P_{L_1} - E(P_{L_1}))(P_{L_2} - E(P_{L_2}))] = \\ &= \frac{1}{L_1 L_2} \iint_{L_1 L_2} E[(P(x, y) - \mu)(P(x', y') - \mu)] ds ds' = \\ &= \frac{\sigma^2}{(\theta_{12} - \theta_{11})(\theta_{22} - \theta_{21})} \int_{\theta_{11}}^{\theta_{12}} \int_{\theta_{21}}^{\theta_{22}} \rho(X_1 + R_1 \cos \alpha_1 - X_2 - \\ &R_2 \cos \alpha_2, Y_1 + R_1 \sin \alpha_1 - Y_2 - R_2 \sin \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (\text{A5}) \end{aligned}$$

因此, 等效参数  $P_{L_1}$  和  $P_{L_2}$  之间的相关系数为

$$r_{12} = \frac{\text{COV}(P_{L_1}, P_{L_2})}{\sqrt{D(P_{L_1})} \sqrt{D(P_{L_2})}} = \frac{\int_{\theta_{11}}^{\theta_{12}} \int_{\theta_{21}}^{\theta_{22}} \rho(\xi_1, \xi_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (\theta_{22} - \theta_{21})(\theta_{12} - \theta_{11})} \quad (\text{A6})$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= X_1 + R_1 \cos \alpha_1 - X_2 - R_2 \cos \alpha_2 \\ \xi_2 &= Y_1 + R_1 \sin \alpha_1 - Y_2 - R_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\}$$

(3) 失效模式之间的相关系数

随机变量  $\mathbf{X}$  经变换得到相互独立的标准正态分布变量  $\mathbf{Y}$ , 其响应面方程为

$$g_i = g_i(\mathbf{X}) = f_i(\mathbf{Y}) \quad (\text{A7})$$

在验算点  $\mathbf{y}^*$  处展开为泰勒级数并取一次项, 可得

$$g_{Li} = f_i(\mathbf{y}^*) + (\mathbf{Y} - \mathbf{y}^*)^T \nabla f_i(\mathbf{y}^*) \quad (\text{A8})$$

式中:  $\nabla f_i(\mathbf{y}^*)$  为函数  $f_i(\mathbf{Y})$  在验算点  $\mathbf{y}^*$  处的梯度向量。求  $g_{Li}$  的均值与方差, 注意到  $\mathbf{Y}$  为相互独立的标准正态分布, 即  $\mathbf{Y}_i$  的均值为 0, 标准差为 1。代入式 (A8) 并进一步求可靠度指标, 有

$$\beta_i = \frac{\mu_{g_{Li}}}{\sigma_{g_{Li}}} = -\mathbf{y}^{*T} \frac{\nabla f_i(\mathbf{y}^*)}{\|\nabla f_i(\mathbf{y}^*)\|} \quad (\text{A9})$$

式中:  $\|\nabla f_i(\mathbf{y}^*)\|$  为  $\nabla f_i(\mathbf{y}^*)$  的模, 此时  $\nabla f_i(\mathbf{y}^*)/\|\nabla f_i(\mathbf{y}^*)\|$  为单位向量。故有  $-\mathbf{y}^*/\beta_i = \nabla f_i(\mathbf{y}^*)/\|\nabla f_i(\mathbf{y}^*)\|$ 。同理, 将另一个失效模式的响应面方程也在其验算点展开, 并取一次项, 得

$$g_{Lj} = f_j(\mathbf{z}^*) + (\mathbf{Z} - \mathbf{z}^*)^T \nabla f_j(\mathbf{z}^*) \quad (\text{A10})$$

其可靠度指标为

$$\beta_j = \frac{\mu_{g_{Lj}}}{\sigma_{g_{Lj}}} = -\mathbf{z}^{*T} \frac{\nabla f_j(\mathbf{z}^*)}{\|\nabla f_j(\mathbf{z}^*)\|} \quad (\text{A11})$$

在式 (A8)、(A10) 中,  $\mathbf{Y}$  和  $\mathbf{Z}$  相关, 若忽略从原始空间转化到标准正态空间造成的随机变量相关系数的偏差, 有

$$\text{COV}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = [r_{ij}^{(kk)}] = \begin{bmatrix} r_{ij}^{(11)} & & & \\ & r_{ij}^{(22)} & & \\ & & \dots & \\ & & & r_{ij}^{(nm)} \end{bmatrix} \quad (\text{A12})$$

故  $g_{Li}$  和  $g_{Lj}$  之间的相关系数为

$$\lambda_{ij} = \frac{\text{COV}(g_{Li}, g_{Lj})}{\sqrt{D(g_{Li})} \sqrt{D(g_{Lj})}} = \frac{\nabla f_i^T(\mathbf{y}^*) [r_{ij}^{(kk)}] \nabla f_j(\mathbf{z}^*)}{\|\nabla f_i(\mathbf{y}^*)\| \|\nabla f_j(\mathbf{z}^*)\|} \quad (\text{A13})$$

将式 (A9)、(A11) 代入式 (A13), 有

$$\lambda_{ij} = \frac{\nabla f_i^T(\mathbf{y}^*) [r_{ij}^{(kk)}] \nabla f_j(\mathbf{z}^*)}{\|\nabla f_i(\mathbf{y}^*)\| \|\nabla f_j(\mathbf{z}^*)\|} = \frac{\mathbf{y}^{*T} [r_{ij}^{(kk)}] \mathbf{z}^*}{\beta_i \beta_j} \quad (\text{A14})$$